

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М.Ліфшиця

“ЗАТВЕРДЖУЮ”

Проректор  
з науково-педагогічної роботи

Пантелеймонов А.В.

« \_\_\_\_ »



Робоча програма навчальної дисципліни

**Варіаційні принципи класичної механіки**

(назва навчальної дисципліни)

рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ бакалавр \_\_\_\_\_  
галузь знань \_\_\_\_\_ 10 Природничі науки \_\_\_\_\_  
(шифр і назва)  
спеціальність \_\_\_\_\_ 104 – Фізика та астрономія \_\_\_\_\_  
(шифр і назва)  
освітня програма \_\_\_\_\_ “Фізика” \_\_\_\_\_  
(шифр і назва)  
спеціалізація \_\_\_\_\_  
(шифр і назва)  
вид дисципліни \_\_\_\_\_ за вибором \_\_\_\_\_  
(обов’язкова / за вибором)  
факультет \_\_\_\_\_ фізичний \_\_\_\_\_

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою фізичного факультету

“ 21 ” 06 2019 року, протокол № 6

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ:

**Рашба Георгій Ілліч, канд. фіз.-мат. наук, доц.**

**Єзерська Олена Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.**

Програму схвалено на засіданні кафедри

теоретичної фізики імені академіка М. Ліфшиця

Програму схвалено на засіданні кафедри теоретичної фізики імені академіка І.М.Ліфшиця

Протокол від “ 10 ” 06 2019 року № 9

Завідувач кафедри теоретичної фізики імені академіка І.М.Ліфшиця

  
(підпис)

Рашба Г.І.  
(прізвище та ініціали)

Програму погоджено методичною комісією

фізичного факультету

(назва факультету, для здобувачів вищої освіти якого викладається навчальна дисципліна)

Протокол від “ 20 ” 06 2019 року № 6

Голова методичної комісії фізичного факультету

  
(підпис)

Макаровський М.О.  
(прізвище та ініціали)

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни «Варіаційні принципи класичної механіки» складена відповідно до освітньо-наукової (освітньо-професійної) програми підготовки першого рівню вищої освіти – бакалавр спеціальності 104 – фізика та астрономія освітня програма – фізика

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни «Варіаційні принципи класичної механіки» є надання студентам кафедри теоретичної фізики поглиблених уявлень про варіаційні принципи, про закони збереження, побудову на основі варіаційних принципів теорії руху механічних систем в лагранжевому та гамільтоновому формалізмах, у формалізмі рівняння Гамільтона–Якобі як для нерелятивістських так і релятивістських механічних систем, встановлення зв'язку між класичною та квантовою механіками.

#### 1.2. Основні завдання вивчення дисципліни

1.3. Кількість кредитів – 3.

1.4. Загальна кількість годин – 90.

|   |
|---|
| 1.5. Характеристика навчальної дисципліни |
| За вибором                                |
| Денна форма навчання                      |
| Рік підготовки                            |
| 3-й                                       |
| Семестр                                   |
| 5-й                                       |
| Лекції                                    |
| 32 год.                                   |
| Практичні, семінарські заняття            |
| Не передбачені навчальним планом          |
| Лабораторні заняття                       |
| Не передбачені навчальним планом          |
| Самостійна робота                         |
| 58 год.                                   |
| Індивідуальні завдання                    |
| Не передбачені навчальним планом          |

1.6. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких результатів навчання:

Знати, розуміти та бути здатним застосовувати на професійному рівні принципи і теоретичні підходи до опису аналізу, тлумачення, пояснення і класифікації суті варіаційних принципів класичної механіки

Бути здатним застосовувати математичні знання з теорії диференціальних рівнянь, варіаційного обчислення, теорії лінійних просторів з метою розв'язання задач класичної механіки різними методами.

## 2. тематичний план навчальної дисципліни

### Розділ 1. Математичний апарат теоретичної механіки

1. Вступ. Два формулювання законів механіки: векторна механіка і аналітична механіка.
2. Системи координат: декартові координати, криволінійні координати, узагальнені координати. Конфігураційний простір.
3. Основні характеристики криволінійних координат: координатні поверхні, координатні лінії, орт криволінійних координат, елемент довжини дуги, фундаментальний метричний тензор, коефіцієнти Ламе, зв'язок між ортами декартових і криволінійних координат. Криволінійні ортогональні координати на площині і в тривимірному просторі. Приклади криволінійних ортогональних координат на площині і в тривимірному просторі.
4. Швидкість і прискорення в криволінійних ортогональних координатах.
5. Основи варіаційного числення. Функціонал, теорема Ейлера–Лагранжа. Інваріантність рівняння Ейлера–Лагранжа відносно перетворення координат.

### Розділ 2. Лагранжева та гамільтонова механіка

6. Принцип найменшої дії Гамільтона. Функція дії. Функція Лагранжа механічної системи. Виведення рівнянь Лагранжа за допомогою принципу найменшої дії. Узагальнений імпульс і узагальнена сила. Циклічні координати. Закон збереження узагальненого імпульсу. Час, як циклічна координата. Закон збереження енергії. Функція Гамільтона. Приклади побудови функції Лагранжа і рівнянь Лагранжа для різних механічних систем.
7. Гамільтонова механіка. Перетворення Лежандра. Узагальнені координати та узагальнені імпульси, як незалежні змінні. Канонічно спряжені змінні. Фазовий простір. Рівняння Гамільтона (канонічні рівняння). Виведення закону збереження енергії виходячи з рівнянь Гамільтона. Приклади розв'язання задач методом Гамільтона. Порівняння із методом Лагранжа.
8. Повна похідна від функції координат, імпульсів і часу. Дужки Пуассона. Дужки Пуассона і закони збереження. Приклади обчислення дужок Пуассона. Комутатор двох операторів – квантовий аналог дужок Пуассона. Доказ тотожності Якобі за допомогою комутаторів.
9. Канонічні перетворення. Перетворююча функція від різних пар канонічно спряжених. Приклади розв'язання задач за допомогою канонічних перетворень. Зв'язок канонічних перетворень з унітарними перетвореннями в квантовій механіці.
10. Дія, як функція координат. Рівняння Гамільтона-Якобі. Повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі.
11. Теорема Якобі.
12. Поділ змінних в рівнянні Гамільтона-Якобі в декартових, циліндричних, сферичних координатах і в довільних криволінійних ортогональних координатах. Приклади розв'язання задач методом Гамільтона-Якобі: вільна частинка, частинка в однорідному полі, гармонічний осцилятор, задача Кеплера, сферичний маятник, потенціал Пешль-Теллера, модифікований потенціал Пешль-Теллера, потенціал Морзе та ін.
13. Класична та квантова механіка. Рівняння Гамільтона-Якобі в  $p$ -зображенні. Елементи гамільтонової оптики.
14. Особливості застосування варіаційних принципів в релятивістській механіці. Приклади: розв'язок релятивістської задачі Кеплера в релятивістському випадку, «релятивістський» осцилятор, рух в постійному однорідному електромагнітному полі.

### 3. Структура навчальної дисципліни

| Назви розділів і тем                                      | Кількість годин |              |      |      |       |           |
|---|-----------------|--------------|------|------|-------|-----------|
|   | денна форма     |              |      |      |       |           |
|   | усього          | у тому числі |      |      |       |           |
| л   |                 | п            | лаб. | інд. | с. р. |           |
| 1   | 2               | 3            | 4    | 5    | 6     | 7         |
| <b>Розділ 1. Математичний апарат теоретичної механіки</b> |                 |              |      |      |       |           |
| Тема 1  | 3               | 1            |      |      |       | 2         |
| Тема 2  | 6               | 2            |      |      |       | 4         |
| Тема 3  | 6               | 2            |      |      |       | 4         |
| Тема 4  | 6               | 2            |      |      |       | 4         |
| Тема 5  | 6               | 2            |      |      |       | 4         |
| Разом за розділом 1                                       | 27              | 9            |      |      |       | 18        |
| <b>Розділ 2. Лагранжева та гамільтонова механіка</b>      |                 |              |      |      |       |           |
| Тема 6  | 6               | 2            |      |      |       | 4         |
| Тема 7  | 7               | 3            |      |      |       | 4         |
| Тема 8  | 7               | 3            |      |      |       | 4         |
| Тема 9  | 7               | 3            |      |      |       | 4         |
| Тема 10   | 7               | 3            |      |      |       | 5         |
| Тема 11   | 7               | 2            |      |      |       | 4         |
| Тема 12   | 7               | 2            |      |      |       | 5         |
| Тема 13   | 7               | 2            |      |      |       | 5         |
| Тема 14   | 8               | 3            |      |      |       | 5         |
| Разом за розділом 2                                       | 63              | 23           |      |      |       | 40        |
| <b>Усього</b>   | <b>90</b>       | <b>32</b>    |      |      |       | <b>58</b> |

#### 4. Теми практичних занять (семінарів)

Не передбачені навчальним планом.

#### 5. Завдання для самостійної роботи

Пояснення щодо того, що повинен зробити студент під час самостійної роботи:

1. По всім нижче вказаним темам опрацювати конспекти лекцій, прочитати відповідні параграфи в підручниках та монографіях;
2. Виконати домашні завдання

| № з/п | Види, зміст самостійної роботи  | Кількість годин |
|-------|---|-----------------|
| 1     | Порівняти розв'язання задачі про математичний маятник методом Ньютона та за допомогою закону збереження енергії       | 2               |
| 2     | Знайти в літературних джерелах приклади криволінійних координат   | 4               |
| 3     | Обчислити фундаментальний метричний тензор для різних криволінійних ортогональних координат. Обчислити одиничні орти, | 4               |

|    |  |           |
|----|--|-----------|
|    | елемент довжини дуги, побудувати координатні поверхні та координатні лінії. Приклади координат див. в [6].   |           |
| 4  | Знайти проєкції прискорення на вісі циліндричних, сферичних та параболоїдних координат   | 4         |
| 5  | Знайти функціональну похідну від функціоналу функції двох змінних.   | 4         |
| 6  | Розв'язати задачу про сферичний маятник методом Лагранжа та методом Гамільтона. Знайти функцію Гамільтона релятивістської частинки в магнітному полі. Перейти до граничного випадку класичної механіки.  | 4         |
| 7  | Навести приклади обчислення дужок Пуассона.  | 4         |
| 8  | Знайти приклади перетворюючих функцій для різних пар канонічно спряжених змінних. Прочитати про зв'язок канонічних перетворень з унітарними перетвореннями в квантовій механіці.   | 4         |
| 9  | Записати рівняння Гамільтона–Якобі для математичного та сферичного маятника, для подвійного маятника.  | 4         |
| 10 | Знайти повний інтеграл Гамільтона–Якобі для математичного та сферичного маятника, для подвійного маятника.   | 5         |
| 11 | Повторити доказ теореми Якобі.   | 4         |
| 12 | Провести поділ змінних в рівнянні Гамільтона-Якобі в декартових, циліндричних, сферичних координатах і в довільних криволінійних ортогональних координатах для частинки у зовнішньому полі.  | 5         |
| 13 | Розв'язати методом Гамільтона-Якобі задачу про частинки в полі тяжіння Землі, в гравітаційному полі (задача Кеплера), про рух точки в полі тяжіння Землі, яка рухається по поверхні конуса, потенціал Пешль-Теллера, модифікований потенціал Пешль-Теллера, потенціал Морзе та ін. | 5         |
| 14 | Записати та розв'язати рівняння Гамільтона–Якобі для частинки в однорідному полі та для гармонічного осцилятора в імпульсному зображенні.  | 5         |
|    | <b>Усього годин</b>  | <b>58</b> |

## 6. Індивідуальні завдання

Не передбачено навчальним планом.

## 7. Методи контролю

Підготовка письмової доповіді для виступу на семінарі, виступ на семінарі, контрольна робота, залік.

## 8. Схема нарахування балів

| Поточний контроль, самостійна робота |                   |       | Залік | Сума |
|--------------------------------------|-------------------|-------|-------|------|
| Розділ 1 (Т1-Т5)                     | Розділ 2 (Т6-Т14) | Разом |       |      |
| 30                                   | 30                | 60    | 40    | 100  |

Для зарахування розділів 1-2 треба набрати у підсумку не менше 15 балів за результатами поточного опитування та перевірки завдань для самостійної роботи по темах 1-14. За залікову письмову роботу студент повинен набрати не менше 20 балів та загалом не менше 50 балів.

### Шкала оцінювання

| Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру | Оцінка за національною шкалою       |                                  |
|--|-------------------------------------|----------------------------------|
|  | для чотирирівневої шкали оцінювання | для дворівневої шкали оцінювання |
| 90 – 100   | відмінно                            | зараховано                       |
| 70-89  | добре                               |                                  |
| 50-69  | задовільно                          |                                  |
| 1-49   | незадовільно                        | не зараховано                    |

## 9. Рекомендована література

### Основна література

1. Аппель П. Теоретическая механика В 2 т. Т. 1. Статика. Динамика материальной точки / Аппель П. – М. : Физматлит., 1960 . – 515 с.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / И. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. I / Н. Н. Бухгольц – М. : Наука, 1969. – 468 с.
4. Голдстейн Г. Классическая механика / Г. Гольдстейн / М. :Наука, 1975. – 413 с.
5. Ковальов О. С. Малі коливання. I. Лінійні коливання : навч.-метод. посіб. / О. С. Ковальов, О. В. Єзерська, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. – 112 с.
6. Класична динаміка у ньютонівському та лагранжевому формалізмі: навч.-метод. посіб. / О. В. Єзерська, О. С. Ковальов, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова. – Харків, ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. – 148 с.
7. Ландау Л. Д. Теоретическая физика В 10 т. Т. I: Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
8. Ланцош К. Вариационные принципы механики / К. Ланцош / М. :Мир, 1965. – 408 с.
9. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов / Маркеев А. П. – М. : ЧеРо, 1999. – 572 с.
10. Невзглядов В. Г. Теоретическая механика / В. Г. Невзглядов – М. : Физматгиз, 1959. – 584 с.
11. Ольховский И. И. Задачи по теоретической механике для физиков / И. И. Ольховський, К. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 391 с.
12. Полак Л. С. Вариационные принципы механики: Их развитие и применение в физике / Л. С. Полак / М. :Книжный дом «ЛИБРОМОМ», 2010. – 600 с.
13. Сулов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Сулов – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1946. – 656 с.

### Допоміжна література

1. Вариационные принципы механики: сборник статей / под ред. Л. С. Полака. М.-Л.: Физматгиз, 1959. – 932 с.
2. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин – М. : Наука, 1965. – 426 с.
3. Сборник задач по аналитической механике / Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
4. Морс Ф. М. Методы теоретической физики В 2 т. Т. 1 / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. – М. : Издательство иностранной литературы, 1958. – 930 с.

5. 8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М. : Наука, 1971. – 576 с.
6. 9. Ландау Л. Д. Задачи по теоретической физике. Ч. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. А. Розенкевич. – Х. : ГНТИУ, 1935. – 120 с.
7. 10. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Л. М. Пятагорский. – М., Л. : ГИТТЛ, 1940. – 200 с.
8. 11. Коткин Г. Л. Сборник задач по классической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. – Ижевск : РХД, 2001. – 352 с.
9. 12. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

## **10. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення**

1. Учбові матеріали на сайті кафедри теоретичної фізики

<http://kaf-theor-phys.univer.kharkov.ua/Robochi%20programy/Klassicheskaya%20dinamika.PDF>

<http://kaf-theor-phys.univer.kharkov.ua/Robochi%20programy/Kovalyov.%20Mali%20kolyvannya.%20I.%20Liniyni%20kolyvannya.pdf>

2. Учбові матеріали інших університетів

[http://theorphys.onu.edu.ua/uploads/sharedfiles/Textbooks/mmf/mmf\\_book\\_b.pdf](http://theorphys.onu.edu.ua/uploads/sharedfiles/Textbooks/mmf/mmf_book_b.pdf)

[http://theorphys.onu.edu.ua/uploads/sharedfiles/Textbooks/mmf/V.M.Adamyan\\_M.Ya.Sushko\\_Introduction\\_to\\_Mathematical\\_Physics\\_Calculus\\_of\\_Variations\\_and\\_Boundary\\_Value\\_Problems.pdf](http://theorphys.onu.edu.ua/uploads/sharedfiles/Textbooks/mmf/V.M.Adamyan_M.Ya.Sushko_Introduction_to_Mathematical_Physics_Calculus_of_Variations_and_Boundary_Value_Problems.pdf)

[http://theorphys.onu.edu.ua/uploads/sharedfiles/Textbooks/mmf/guide\\_mmf.pdf](http://theorphys.onu.edu.ua/uploads/sharedfiles/Textbooks/mmf/guide_mmf.pdf)